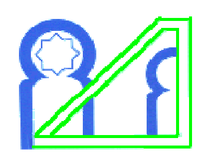
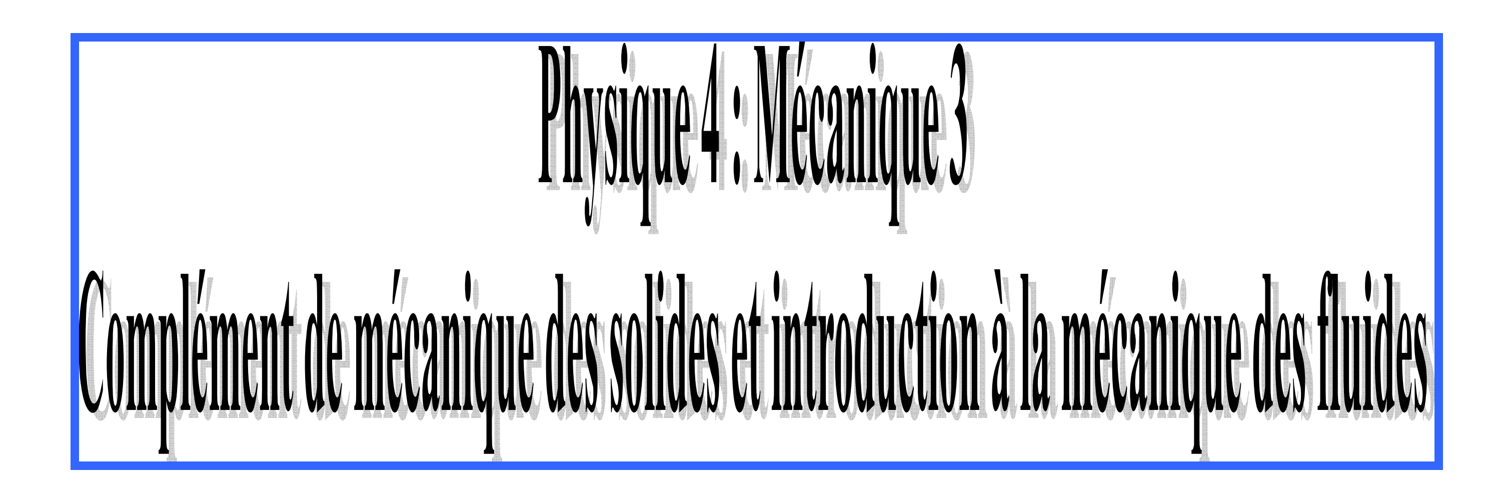


UNIVERSITÉ MOHAMMED V-AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES - RABAT
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE



FILIERE : S.M.P.



KAMAL GUERAOUI
Professeur de l'Enseignement Supérieur et Responsable de l'Equipe de Modélisation Théorique et Numérique en Mécanique des Fluides et en Environnement

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2009 – 2010

Table de matière

Partie 1 : Mécanique des fluides

Introduction

L’étude de la mécanique des fluides remonte au moins à l’époque de la Grèce antique avec Archimède qui a découvert la notion de la poussée d’Archimède pour un fluide au repos.
Aujourd’hui, la mécanique des fluides est l’un des domaines de la recherche les plus actifs avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus, comme les problèmes de la pollution atmosphérique. La résolution des équations régissant ces problèmes complexes fait appel aux méthodes de résolution numériques.
Comme tout problème de mécanique, la résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la définition du système matériel S, particules de fluide à l'intérieur d'une surface fermée limitant S. À ce système, on applique les principes et théorèmes généraux de mécanique et de thermodynamique à savoir :
- principe de la conservation de la masse,
- principe fondamental de la dynamique,
- principe de la conservation de l'énergie.

La mécanique des fluides concerne l’étude du comportement des fluides et des forces internes associées.
Elle se divise en statique des fluides et dynamique des fluides :

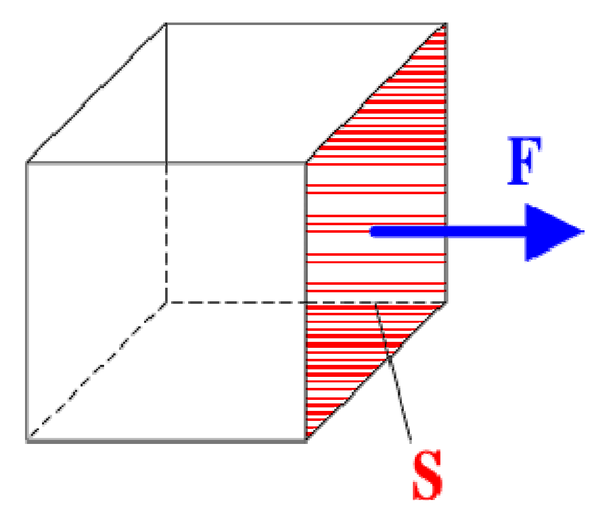
- Statique des fluides : C’est l’étude des fluides au repos
- Dynamique des fluides : C’est l’étude des fluides en mouvement

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.
Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux. La propriété physique qui permet de faire la différence entre les deux est la compressibilité.
- l'isotropie assure que les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.
- la mobilité fait qu'ils n'ont pas de forme propre et qu'ils prennent la forme du récipient qui les contient.
- la viscosité caractérise le fait que tout changement de forme d’un fluide réel s'accompagne d'une résistance (frottements).

Chapitre 1 : Statique des fluides

I- Pression et Force

Les particules qui forment un fluide ne sont pas immobiles les unes par rapport aux autres. Elles sont agitées de façon désordonnée ce qui provoque de nombreux chocs entre elles et avec les parois. Par ces chocs, le fluide applique une force sur les parois. Ces forces sont appelées *forces de pression*.



Considérons la figure ci-dessus représentant une enceinte contenant un fluide. Ce fluide exerce donc des forces sur chacune des parois. Ces forces sont dirigées vers l'extérieur de l'enceinte et sont perpendiculaires aux parois. Si on considère la face hachurée de surface *S*, le fluide lui applique une force *F*. On peut ainsi définir la pression *P* du fluide comme le rapport de cette force *F* et de la surface *S* :

$$P = \frac{F}{S}$$

La pression représente donc la force qui s'exerce sur chaque unité de surface.

II- Unités de pression

Dans le système international, l'unité pour la force est le Newton, noté N, et l'unité de la surface est le mètre carré (m^2). Par conséquent, l'unité dans le système international pour la pression sera le N/m^2.

Une unité a été inventée pour la pression : C'est le Pascal, noté Pa. On a par conséquent l'équivalence suivante : 1 Pa = 1 N/m^2

Il existe de nombreuses autres unités de pression couramment employées dans l'industrie.

bar : 1bar = 10^5 Pa

Atmosphère (atm) : 1 atm=101325 Pa

Millimètre de mercure (mmHg) ou torr : 1 mmHg=133,32 Pa

III- Notions de pressions absolue et relative

Nous vivons dans un monde qui est baigné au sein d'un fluide : *l'air*.

On désigne par *pression atmosphérique* la valeur de la pression de l'air ambiant.

Cette valeur (que l'on mesure à l'aide d'un baromètre) fluctue en fonction des conditions météorologiques et de la zone géographique. Toutefois, la valeur de la pression atmosphérique oscille autour d'une valeur moyenne qu'on appelle pression atmosphérique normale qui vaut 101325 Pa.

Lorsque la pression d'un fluide est *supérieure à la pression atmosphérique* on dit que ce fluide est *sous pression*.

Lorsque la pression du fluide est *inférieure* à la pression atmosphérique, on dit que le fluide est *sous vide*.

Une pression nulle (P=0 Pa) correspond à un vide parfait qui correspond en fait à une absence totale de particules (atomes ou molécules).

On définit la *pression relative*, que l'on note P', par : $P' = P - P_{atm}$

P est la pression absolue. P et P' sont toutes deux des pressions et ont par conséquent la même unité.

IV- L'équation de l'hydrostatique

IV-1. Formulation mathématique

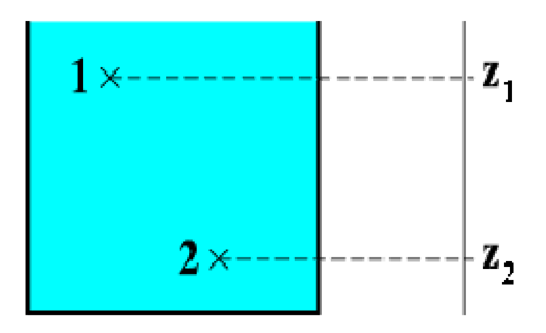
La pression varie avec la hauteur dans le liquide. Un point du fluide sera donc représenté par son *altitude* notée z. L'altitude est la coordonnée du point sur un axe vertical et dirigé vers le haut. On fixera de manière arbitraire l'altitude 0 (l'origine) sur cet axe. On veillera tout de même à choisir une origine pratique comme par exemple le fond d'un réservoir, le centre d'une pompe, etc.

Pour exprimer à l'aide d'une relation mathématique l'évolution de la pression au sein d'un fluide au repos, il convient de respecter scrupuleusement les hypothèses suivantes :

- Le fluide doit être au *repos*.
- Le fluide doit être homogène. On ne peut écrire de relation qu'au sein d'un seul et même liquide.

On considère au sein de ce fluide homogène et au repos, deux points distincts 1 et 2, d'altitudes respectives z_1 et z_2, alors on peut écrire la relation suivante entre les pressions P_1 et P_2 :

$$P_1 + \rho_{fluide}.g.z_1 = P_2 + \rho_{fluide}.g.z_2$$



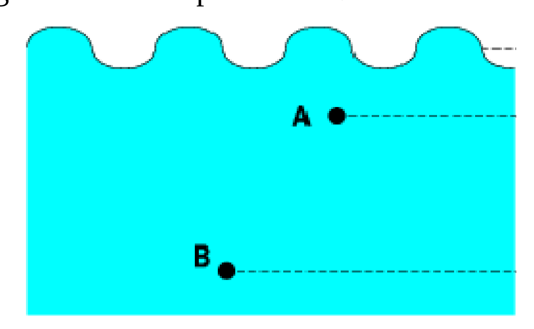
Où : g est l'accélération de la pesanteur.

Cette relation est appelée *équation de l'hydrostatique*. On peut aussi l'écrire de la façon suivante :

$$P + \rho.g.\ z = \text{constante}$$

IV-2. Exemple

La pression de l'eau dans l'océan à 15 m de profondeur est de 4 bar. On souhaite connaître la pression qui règne à 200 m de profondeur. La densité de l'eau de mer est de 1,02.



On choisit l'origine des altitudes à la surface de l'océan. Le point A correspondant à une profondeur de 15 m aura donc une altitude négative z_A=-15 m. De même, z_B=-200 m. On aura de plus :

$$\rho_{mer} = d_{mer}.\rho_{eau} = 1{,}02 * 1000 = 1020 kg / m^3$$

$$P_A = 4 bar = 400000\, P_a$$

On peut raisonnablement considérer l'océan comme un fluide homogène et au repos (on supposera qu'il n'existe pas de courants marins). Par conséquent, on peut appliquer l'équation de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{mer}.g.z_A = P_B + \rho_{mer}.g.z_B$$

D'où :

$$P_B = P_A + \rho_{mer}.g.(z_A - z_B) = 400000 + 1020 * 9.81 * (-15 - (-200))$$

$$P_B = 2251147\, P_a = 22.5 bar$$

La pression de l'océan à 200 m de profondeur est donc de 22.5 bar.

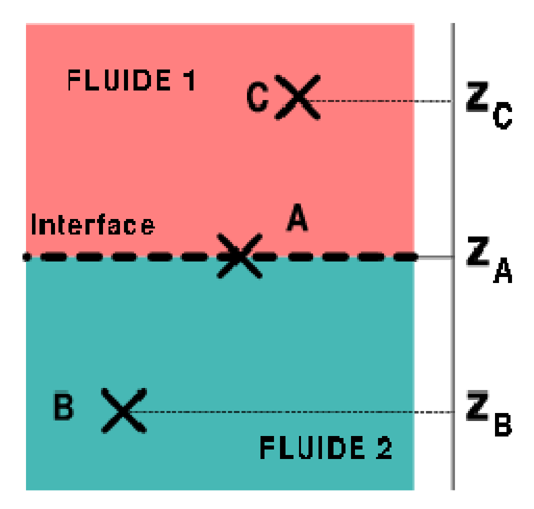
IV-3. Remarque : cas des gaz

Les masses volumiques des gaz sont très faibles en comparaison de celles des liquides. Par conséquent, dans un gaz, la pression variera très peu avec l'altitude. *On pourra donc considérer en génie des procédés que dans un gaz la pression est partout la même*.

IV-4. Interface entre deux fluides

Il est très courant de rencontrer deux fluides en contact comme un gaz au-dessus d'un liquide ou un liquide léger surnageant sur un liquide plus lourd avec lequel il n'est pas miscible. Cette surface de contact est, pour un liquide au repos, plane et horizontale. On l'appelle aussi *interface*.

On aura alors la propriété suivante : *la pression est identique de part et d'autre de l'interface*. En effet, lorsque l'on traverse l'interface, on n'observe pas de discontinuité brutale de la pression. Ainsi, par exemple, la pression d'un liquide à sa surface ouverte à l'atmosphère est la pression atmosphérique.



Si on considère la figure suivante, on peut voir l'interface entre le fluide 1 et le fluide 2. Le point A est situé à l'interface des deux fluides. Par conséquent, le point A appartient à la fois au fluide 1 et au fluide 2. La pression P_A est donc la même que l'on considère que le point A fasse partie du fluide 1 ou du fluide 2. On peut ainsi appliquer l'équation de l'hydrostatique au sein du fluide 1 entre les points A et B, et aussi sur le fluide 2 entre les points A et C :

$$P_A = P_B + \rho_1 .g.(z_B - z_A)$$

$$P_A = P_C + \rho_2 .g.(z_C - z_A)$$

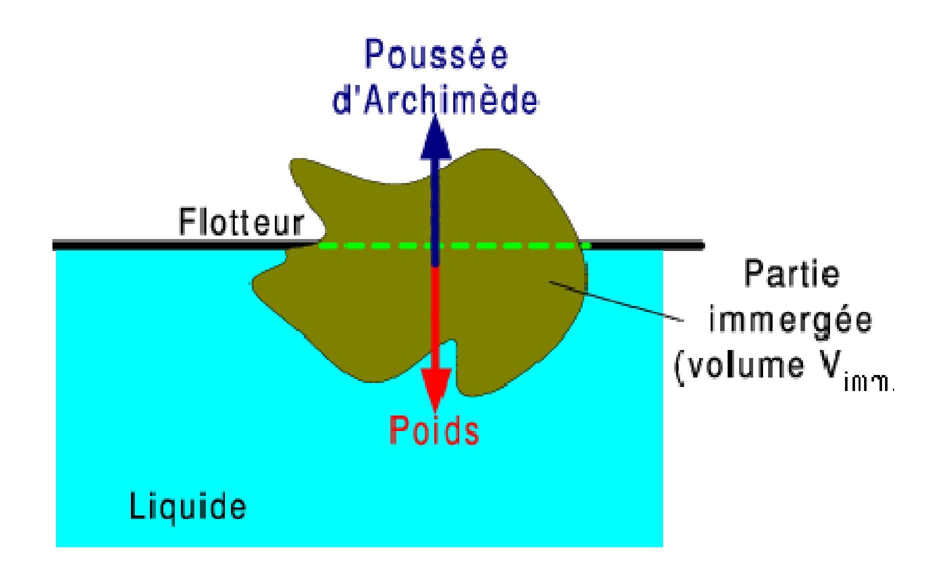
Par conséquent, on aura la relation suivante entre P_B et P_C :

$$P_B = P_C + \rho_2.g.(z_C - z_A) - \rho_1.g.(z_B - z_A)$$

On notera enfin la remarque suivante qui est très importante : *on ne peut pas écrire directement l'équation de l'hydrostatique entre les points B et C, car ils appartiennent à des fluides différents.*

V- Corps immergés : Principe d'Archimède

Analysons ce qui se passe du point de vue de l'équilibre mécanique sur un flotteur, c'est à dire réfléchissons aux forces auxquelles il est soumis.



Tout d'abord, le flotteur est soumis à son propre poids, dirigé vers le bas et d'intensité $m \cdot g$, où m est la masse du flotteur et g l'accélération de la pesanteur.

Mais le poids n'est pas la seule force, sinon le flotteur coulerait. Il est donc soumis à une force dirigée en sens inverse du poids et égale en intensité pour assurer l'équilibre des forces.

Cette force est appelée *Poussée d'Archimède*. Le principe d'Archimède permet de relier l'intensité de cette poussée au volume de flotteur immergé et à la masse volumique du liquide. L'énoncé traditionnel du principe d'Archimède est le suivant :

Tout corps plongé dans un liquide subit une poussée verticale dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids de liquide déplacé.

Il est toutefois possible d'en donner une présentation plus simple. Ainsi, si l'on appelle V_{imm}, le volume de la partie du flotteur qui est immergée dans le liquide, alors l'intensité A de la poussée d'Archimède s'exprimera de la façon suivante :

$$A = \rho_{liquide}.g.V_{imm}$$

Remarque :

Pour que le flotteur soit en équilibre, c'est à dire pour qu'il flotte, il faut que la poussée d'Archimède soit égale en intensité au poids du flotteur. Or, le poids du flotteur vaut :

$$m_{flotteur}\,.g.$$

On aura donc : $m_{flotteur}.g = \rho_{liquide}.g.V_{imm}$

En remplaçant $m_{flotteur}$ par $\rho_{flotteur}.V_{flotteur}$, on obtient :

$$\rho_{flotteur}.g.V_{flotteur} = \rho_{liquide}.g.V_{imm}$$

Le volume immergé V_{imm} est toujours plus petit que le volume total du flotteur $V_{flotteur}$. Par conséquent, pour que la précédente relation soit satisfaite et que le flotteur flotte, il faut que la masse volumique du liquide soit plus faible que celle du liquide. $\rho_{flotteur} < \rho_{liquide}$

On pourra encore écrire cette condition avec les densités : $d_{flotteur} < d_{liquide}$

VI- Action d'un fluide sur une paroi

VI-1. Force exercée sur un élément de surface

Soit un liquide contenu dans un récipient de forme quelconque. Soit P_0 la pression du gaz environnant le récipient.
En un point M situé à une distance h de la surface libre du liquide, la pression est :

$$P(M) = P_0 + \rho\, g\, h$$

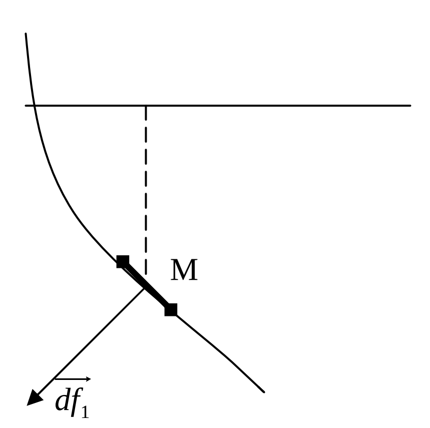
L'élément de surface ***dS*** entourant lepoint M subit :

- Une force df_1 normale à ***dS*** et orientée vers l'extérieur de la part du liquide :

$$df_1 = P\,dS = [\,P_0 + \rho\, g\, h\,]\,dS$$

- Une force df_2 normale à ***dS*** et orientée vers l'intérieur du fluide de la part du gaz environnant

$$df_2 = P_0\,dS$$



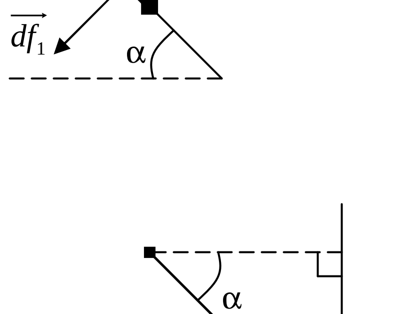
La résultante s'exerçant sur ***dS*** est donc [force relative] :

$$df = \rho\, g\, h\, dS \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{df} = \rho\, g\, h\, dS\, \vec{n}$$

Où : $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à ***dS*** et orienté vers l'extérieur.

VI-2. Cas d'une paroi plane

Soit ***l*** la largeur de la paroi perpendiculaire au plan de la figure et **L** sa longueur dans le plan de la figure.



On a :

$$dS = dl\ dL$$

$$\sin\alpha = \frac{dz}{dL} \quad \Rightarrow \quad dL = \frac{dz}{\sin\alpha}$$

Or :

$$z = L \sin\alpha$$

$$dS = dl\ \frac{dz}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad df = \rho\ g\ z\ dl\ \frac{dz}{\sin\alpha}$$

Donc :

$$F = \frac{\rho\ g}{\sin\alpha}\int_0^l dl \int_0^{L\sin\alpha} z\ dz$$

$$F = \frac{\rho\ g}{\sin\alpha}\ l\ \frac{L^2 \sin^2\alpha}{2} = \rho\ g\ l\ L^2\ \frac{\sin\alpha}{2}$$

Détermination du point d'application

Toutes les forces élémentaires sont orientées suivant $\vec{n}$ $\Rightarrow$ la résultante l'est aussi :

$$\vec{F} = \rho\ g\ l\ L^2\ \frac{\sin\alpha}{2}\ \vec{n}$$

Pour déterminer le point d'application de $\vec{F}$, appelé centre de poussée ***C,*** on écrit le moment en ***O***

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{df}$$

Le moment de la résultante = résultantes des moments en un point (***O*** par exemple).

$$\overrightarrow{OC} = OC\ \vec{u}$$

$$OC \cdot F = \int_S OP \cdot df$$

$$OC \cdot \rho\ g\ l\ L^2\ \frac{\sin\alpha}{2} = \int \frac{z}{\sin\alpha} \cdot \rho\ g\ z\ \frac{dl\ dz}{\sin\alpha}$$

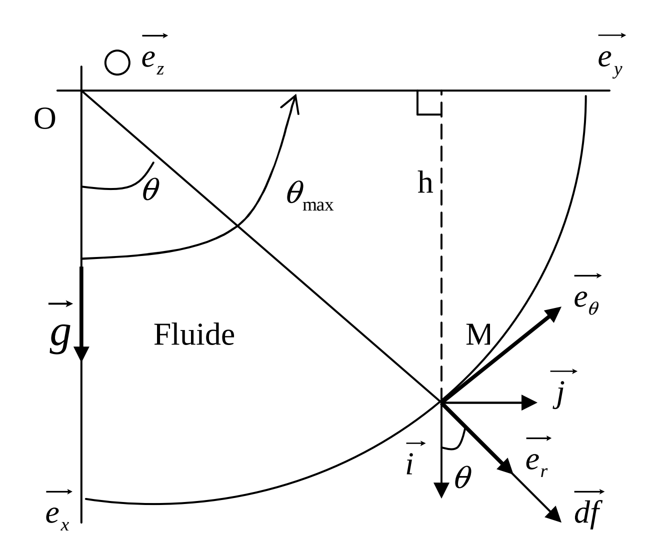
$$\Rightarrow \quad OC \cdot \rho\ g\ l\ L^2\ \frac{\sin\alpha}{2} = l\ \frac{\rho\ g}{\sin^2\alpha}\int_0^{L\sin\alpha} z^2\ dz$$

$$\Rightarrow \quad OC\ \frac{\sin\alpha}{2}\ L^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\ \frac{\int_0^{L\sin\alpha} z^2\ dz}{}$$

$$\Rightarrow \quad OC \ \frac{\sin\alpha}{2} L^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \frac{L^3 \sin^3\alpha}{3}$$

$$\Rightarrow \quad OC = \frac{2\,L}{3} \qquad \text{Indépendant de } \alpha$$

VI-3. Cas d'une paroi Cylindrique



On considère le schéma ci-dessus.

Où : $\overrightarrow{Oe_z}$ est l'axe perpendiculaire au plan de la figure et l la largeur suivant cet axe.

L'angle θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Le vecteur normal à la paroi est : $\vec{n} = \vec{e}_r$

Toutes les forces relatives élémentaires passent par O, d'où la résultante est appliquée en $\boldsymbol{O} \equiv \boldsymbol{C}$ centre de poussée.

$$\overrightarrow{df} = \rho\ g\ h\ dS\ \vec{n}$$

Avec : $\quad dS = R\ d\theta\ dz$

En projetant cette relation suivant la verticale et l'horizontale, on aura :

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j}$$

Or : $\quad h = R\cos\theta \qquad$ car $\qquad \cos\theta = \frac{h}{R}$

→ O centre de poussée ; en effet :

$$\overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df} = \vec{0}$$

Or : $\quad \overrightarrow{OM} \mathbin{//} \overrightarrow{df} \quad \forall M \in \text{paroi} \quad \Rightarrow \quad O \equiv C$

→ **Composante horizontale** F_y

$$df_y = \rho\ g\ h\ dS\ \overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_y} \quad = \quad \rho\ g\ h\ dS\ \sin\theta$$

$$F_y = \int_S df_y = \rho\ g \int R\cos\theta\ R\ d\theta\ dz\ \sin\theta$$

$$F_y = \rho\ g\ R^2\ l \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\ d\theta \quad = \quad \rho\ g\ R^2\ l \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$F_y = \rho\ g\ R^2\ \frac{l}{2}$$

→ **Composante verticale** F_x

$$F_x = \int_S df_x = avec \quad df_x = \rho\ g\ h\ dS\ \cos\theta$$

$$F_x = \rho\ g \int R\cos\theta\ R\ d\theta\ dz\ \cos\theta \quad = \quad \rho\ g\ R^2\ l \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\ d\theta$$

$$F_x = \quad \rho\ g\ R^2\ l \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta$$

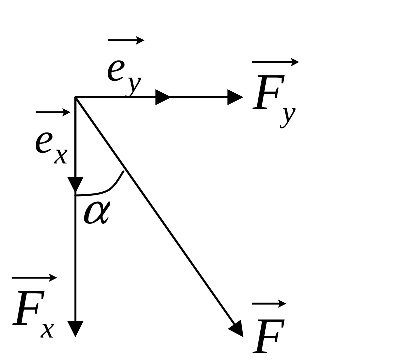
Or :

$$\cos^2\theta\ +\ \sin^2\theta\ = 1$$
$$\cos^2\theta\ -\ \sin^2\theta\ = \cos 2\theta$$

$$F_x = \quad \rho\ g\ R^2\ \frac{l}{2}\left[\theta\ +\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \rho\ g\ \frac{R^2\ l}{2}\frac{\pi}{2} \ = \ \rho\ g\ \frac{R^2\ l}{4}\pi$$

→ **La force** $\vec{F}$

$$F = F_x\ \overrightarrow{e_x} + \ F_y\ \overrightarrow{e_y}$$



$$tg\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Chapitre 2 : dynamique des fluides parfaits

I- Description d'un fluide en mouvement

I-1. Représentation eulérienne et représentation lagrangienne

I-1.1 Représentation lagrangienne

Décrire le mouvement d'un fluide fait appel à des notions différentes de celles développées en Mécanique du point ou du solide. Le mouvement d'un fluide est un **écoulement** où il y a déformation continue du fluide.
On peut, de manière analogue à ce que l'on fait en Mécanique du solide, isoler (par la pensée ou en trouvant un moyen de visualisation, coloration par exemple) une partie restreinte du fluide appelée **particule** et la " suivre " au cours du temps c'est à dire connaître à chaque instant sa position.

Cette position sera connue, par exemple, par ses coordonnées cartésiennes :

$x_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p})$, $y_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p})$ et $z_p(t, x_{0p}, y_{0p}, z_{0p})$

Où : x_{0p}, y_{0p}, z_{0p} représentent les coordonnées de la particule choisie à l'instant t_0, la **vitesse** de la particule aura pour composantes : $v_x = \frac{\partial x_p}{\partial t}$, $v_y = \frac{\partial y_p}{\partial t}$ et $v_z = \frac{\partial z_p}{\partial t}$.

Au cours du temps, la particule sera en différents points M, l'ensemble des points M constitue la **trajectoire** de la particule.
Cette façon de faire est appelée **méthode de Lagrange**, les variables introduites sont appelées **variables de Lagrange**.
La méthode de Lagrange s'avère dans la plupart des cas délicate, car il n'est pas facile de suivre les particules : elle est peu employée.

I-1.2 Représentation eulérienne

La **méthode d'Euler** consiste à connaître la vitesse des particules au cours du temps t à un endroit donné déterminé par ses coordonnées, par exemple cartésiennes x, y, z. Elle est plus employée que la méthode de Lagrange, la connaissance du champ des vitesses étant suffisante pour la description du fluide en mouvement.
Les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont des fonctions des variables (x, y, z), ainsi $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

Où : $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$ et $v_z = v_z(x, y, z, t)$.

Remarque :

Dans la méthode d'Euler, l'accélération d'une particule peut être due, bien sur, au caractère instationnaire de l'écoulement, mais aussi à sa non-uniformité. Ainsi, chacun a pu constater, dans l'écoulement permanent d'une rivière, l'accélération des particules lors du franchissement d'un rétrécissement.

II- Définitions

II-1. Ecoulement permanent

L'écoulement du fluide est **permanent** ou **stationnaire** si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps t ; il est dit **non-permanent** ou **instationnaire** si cette condition n'est pas réalisée.

II-2. Ecoulement uniforme

L'écoulement du fluide est **uniforme** si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace ; il est **non-uniforme** si cette condition n'est pas remplie.

II-3. Ecoulement plan

Un écoulement plan est un écoulement dont le champ de vitesse est, à tout instant, parallèle à un même plan, et qui ne varie pas perpendiculairement au plan.

On a donc : $\vec{v}(\vec{x},t)=\begin{cases} v_1(x_1,x_2,t) \\ v_2(x_1,x_2,t) \\ 0 \end{cases}$

II-4. Ecoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si $\overrightarrow{rot}(\vec{v})=\vec{0}$.

Dans ce cas, $\exists\varphi$ appelée potentiel des vitesses telle que $\vec{v}=-\overrightarrow{grad}(\varphi)$

Remarque :

Le vecteur $\vec{\omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ est appelé vecteur tourbillon.

II-5. Ligne de courant à un instant t_0 fixe

On appelle **ligne de courant** une courbe dont la direction tangente en chacun de ses points est la direction du vecteur vitesse. L'équation d'une ligne de courant se calcule par intégration des équations obtenues à l'aide de :

$$\vec{V}\Lambda d\vec{M} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} \Lambda \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

II-6. Tube de courant

Un **tube de courant** est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

II-7. Ligne d'émission

On appelle **ligne d'émission** une courbe constituée par l'ensemble des points atteints à un instant donné par des particules passées antérieurement en un même point. Trajectoire, ligne de courant et ligne d'émission sont confondues pour un écoulement permanent.

II-8. Trajectoires

Ensemble des positions $\vec{x}$ occupées par une particule fluide donnée.

Elle est donc solution de : $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x},t) \quad \Leftrightarrow \; dx_i = v_i(\vec{x},t)dt$

Ce qui conduit à (si $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0 \, et \, v_3 \neq 0$) :

$$dt = \frac{dx_1}{v_1(\vec{x},t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x},t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x},t)}$$

On a trois équations du premier ordre, donc 3 constantes d'intégration. On obtient ainsi une famille de courbes à 3 paramètres.

Pour observer, au sens propre, des trajectoires, on peut mettre en suspension dans le milieu quelques particules et faire une photographie avec un temps de pose très long.

Remarque :

A priori, les trajectoires et les lignes de courant sont des entités différentes. Toutefois ces deux concepts sont identiques dans le cas d'écoulements stationnaires.

III- Equation de continuité

III-1. Dérivation suivant la méthode d'Euler

Considérons la fonction scalaire Q(x, y, z, t) rendant compte d'une grandeur physique caractéristique du fluide au point de coordonnées x, y, z et au temps t.

La particule fluide au temps t + dt sera au point de coordonnées $x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$. La variation de la fonction Q sera donc égale à :

$$dQ = Q(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - Q(x,y,z,t) = \frac{\partial Q}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial Q}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial Q}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial Q}{\partial t} dt$$

La dérivée $\frac{dQ}{dt}$, que l'on note $\frac{DQ}{dt}$ et que l'on appelle **dérivée particulaire**, est égale à :

$$\frac{DQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x} v_x + \frac{\partial Q}{\partial y} v_y + \frac{\partial Q}{\partial z} v_z + \frac{\partial Q}{\partial t} = \vec{v} \, \overrightarrow{\mathbf{grad}} Q + \frac{\partial Q}{\partial t}$$

Cette dérivée apparaît comme la somme de deux termes :

- le premier, qualifié de **convectif** ou **advectif**, est du à la non-uniformité de l'écoulement,
- le second, qualifié de **temporel**, est du au caractère instationnaire de l'écoulement.

III-2. Théorème de la divergence

Nous nous contenterons de donner, sans démonstration, un énoncé de ce théorème appelé aussi théorème de Green – Ostrogradski :

Le flux d'un champ tensoriel A au travers de la surface ∂D enveloppant le domaine D est égal à l'intégrale de la divergence du champ tensoriel sur le domaine :

$$\int_{\partial D} \mathbb{A}\vec{n}\,ds = \int_{D} div\mathbb{A}\,dv$$

Remarque :

Dans le cas où A représente un champ vectoriel constant, on obtient $\int_{\partial D} \vec{n}ds$

Dans le cas où A représente un champ scalaire f, on obtient $\int_{\partial D} f\,\vec{n}ds = \int_{D} \overrightarrow{grad}(f)dv$

III-3. Théorème de l'intégrale nulle

L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Considérons un champ vectoriel volumique a défini et continu sur un domaine D. Si quelque soit le sous domaine D* inclus dans D, l'intégrale du champ tensoriel sur le domaine D* est nulle, alors le champ tensoriel est identiquement nul.

$$\int_{D'} \mathbb{a}\,dv = 0 \quad \forall D' \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{a} = \mathbb{0}$$

III-4. Equation de continuité

Le principe de conservation de la masse postule qu'il n'y a ni apparition ni disparition de matière. En conséquence la variation de la masse au cour du temps est nulle :

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

La masse peut se calculer à partir de la masse volumique :

$$M = \int_{D} \rho dv \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{D} \rho dv = 0$$

Avec la notion de dérivée particulaire d'une intégrale de volume, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho \vec{v}.\vec{n}\, ds = 0$$

On peut encore utiliser le théorème de la divergence :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial D} \rho \vec{v}.\vec{n}\, ds = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_D div(\rho \vec{v})\, dv = 0$$

Ce qui nous donne une forme locale de l'équation de continuité avec le théorème de l'intégrale nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

De plus, nous avons les relations :

$$div(\rho \vec{v}) = \rho div(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{grad\ \rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad\ \rho}$$

On obtient ainsi une autre forme locale de l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div(\vec{v}) = 0$$

Remarque :

Sauf précision contraire, nous appliquerons l'équation de conservation de masse en absence de source ou de puits, soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, div(\rho \vec{v}) = 0$. Deux cas particuliers sont alors à considérer.

Le **cas 1** d'un fluide **incompressible** (ρ = cte) $\Rightarrow$ $div(\vec{v}) = 0$ pour un écoulement **stationnaire** ou **instationnaire**.
Cet écoulement est dit **isovolume**.
Le **cas 2** d'un écoulement **stationnaire** $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\Rightarrow$ $div(\rho \vec{v}) = 0 = \rho\, div(\vec{v}) + \vec{v}\, \overrightarrow{grad}(\rho)$
En dehors de la possibilité **cas 1**, il existe la possibilité d'écoulements **isovolumes** tels que $\vec{v}\, \overrightarrow{grad}(\rho)$ = 0 où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse.

Ce cas correspond à des écoulements **stratifiés** par salinité ou température (courants marins), par température et humidité (atmosphère).

III-5. Vitesse et accélération

III-5.1 Vitesse

Pour une particule fluide donnée, identique pour $\vec{M}$ fixé, la vitesse est donnée par :

$$\vec{v}\left(\vec{M},t\right)=\left.\frac{d\vec{x}}{dt}\right|_{\vec{M}}$$

Soit en notation tensorielle : $$v_i\left(M_j,t\right)=\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{M_j}$$

III-5.2 Accélération

Pour une particule fluide donnée, identique pour $\vec{M}$ fixé, l'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma}\left(\vec{M},t\right)=\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\vec{M}}$$

Soit en notation tensorielle : $$\gamma_i\left(M_j,t\right)=\left.\frac{dv_i}{dt}\right|_{M_j}$$

III-6. Conservation du débit

III-6.1 Définitions

i. Le débit

Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.

ii. Débit-masse

Si dm est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps dt, par définition le débit-masse est : $q_m = \frac{dm}{dt}$

Son unité est le $kg \cdot s^{-1}$

iii. Débit-volume

Si dV est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps dt, par définition le débit-volume est : $q_V = \frac{dV}{dt}$

Son unité est le $m^3 \cdot s^{-1}$.

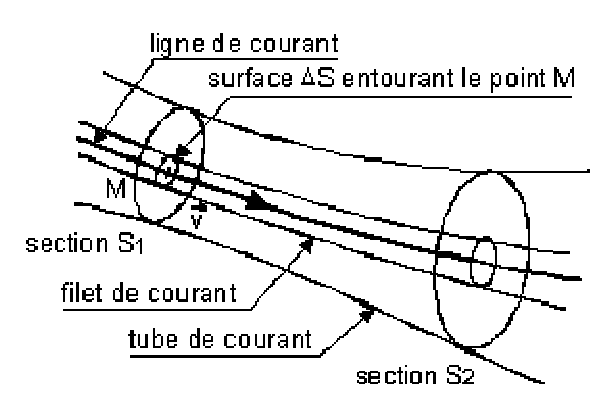
vi. Relation entre q_m et q_V

La masse volumique est donnée par la relation : $\rho = \frac{dm}{dV}$ d'où : $q_m = \rho q_V$

Remarque :

Les liquides sont incompressibles et peu dilatables (masse volumique constante) ; on parle alors d'**écoulements isovolumes**.

Pour les **gaz**, la masse volumique dépend de la température et de la pression. Pour des vitesses faibles (variation de pression limitée) et pour des températures constantes on retrouve le cas d'un écoulement isovolume.



III-6.2 Conservation du débit

Considérons un tube de courant entre deux sections S_1 et S_1. Pendant l'intervalle de temps dt, infiniment petit, la masse dm_1 de fluide ayant traversé la section S_1 est la même que la masse dm_2 ayant traversé la section S_2.

En régime stationnaire, le débit-masse est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant. $q_{m1} = q_{m2}$

Dans le cas d'un **écoulement isovolume** (ρ = Cte) :

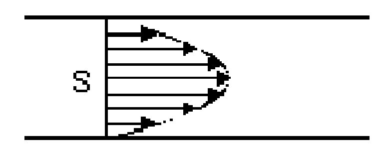
En régime stationnaire, le débit-volume est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant. $q_{V1} = q_{V2}$

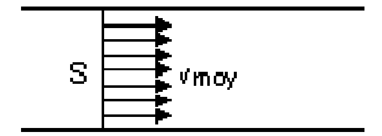
III-6.3 Expression du débit en fonction de la vitesse v

Le débit-volume est aussi la quantité de liquide occupant un volume cylindrique de base S et de longueur égale à v, correspondant à la longueur du trajet effectué pendant l'unité de temps, par une particule de fluide traversant S.

Il en résulte la relation importante : $q_V = V\,S$

III-6.4 Vitesse moyenne





En général, la vitesse v n'est pas constante sur la section S d'un tube de courant ; on dit qu'il existe un **profil de vitesse** (à cause des forces de frottement). Le débit-masse ou le débit-volume s'obtient en intégrant la relation précédente :

Dans une section droite S de la canalisation, on appelle **vitesse moyenne** V_{moy} la vitesse telle que : $V_{moy} = \frac{q_V}{S}$

La vitesse moyenne V_{moy} apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section S qui assurerait le même débit que la répartition réelle des vitesses.

Si l'écoulement est isovolume, cette vitesse moyenne est inversement proportionnelle à l'aire de la section droite. $q_V = V_{1moy} S_1 = V_{2moy} S_2 = cte$

C'est l'équation de continuité qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

La vitesse moyenne est d'autant plus grande que la section est faible.

III-7. Théorème de BERNOULLI

III-7.1 Le phénomène

Observations

- Une balle de ping-pong peut rester en suspension dans un jet d'air incliné.
- Une feuille de papier est aspirée lorsqu'on souffle dessus.

Conclusion : La pression d'un fluide diminue lorsque sa vitesse augmente.

III-7.2 Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d’un fluide parfait incompressible

Un *fluide parfait* est un fluide dont l'écoulement se fait *sans frottement*.

On considère un écoulement permanent isovolume d’un fluide parfait, entre les sections S_1 et S_2, entre lesquelles il n’y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine).

Soit m la masse et V le volume du fluide qui passe à travers la section S_1 entre les instants t et t+dt. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section S_2. Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

En appliquant le théorème de l’énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et t+dt (la variation d’énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

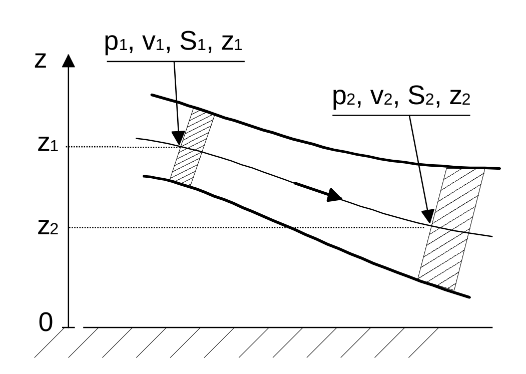
$$\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz+p=Cte$$

p est la pression statique, ρgz est la pression de pesanteur, $\rho\frac{V^2}{2}$ est la pression cinétique.

Tous les termes s’expriment en pascal.

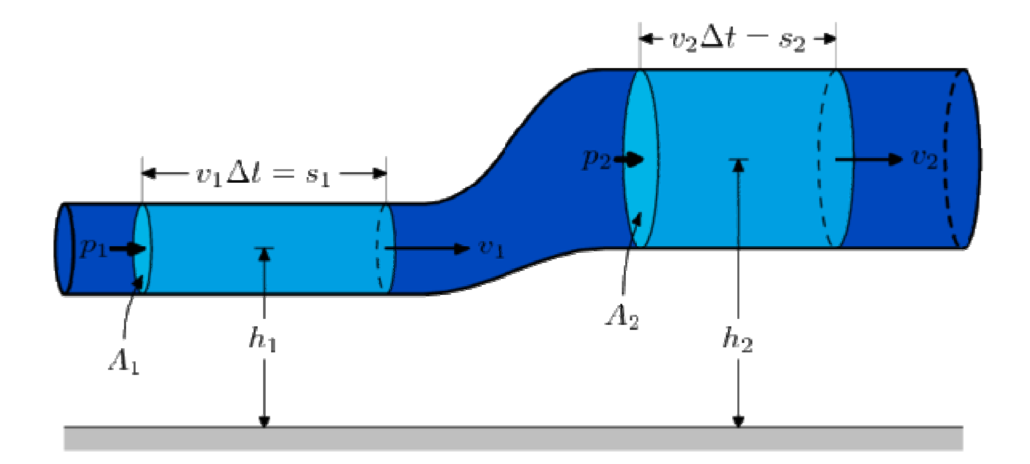
En divisant tous les termes de la relation précédente par le produit g, on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

H est la Hauteur totale, $\frac{P}{\rho g}$ est la Hauteur de Pression, z est la cote, $\frac{V^2}{2g}$ est la Hauteur cinétique, $z+\frac{P}{\rho g}$ est la Hauteur piézométrique.



III-7.3 Démonstration :

On considère le schéma suivant :



L'équation de Bernoulli pour les fluides incompressibles peut être démontrée, soit, par application du principe de conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant, en négligeant les effets thermiques, de viscosité, de compressibilité, soit, à l'aide de l'équation d'Euler.

i. A l'aide de la conservation d'énergie

Soit le système fermé contenu à l'instant t entre x_1 et x_2 et à $t + \Delta t$ entre $x_1 + v_1.\Delta t$ et $x_2 + v_2.\Delta t$.

Le fluide est incompressible, la masse Δm contenue entre x_1 et x_2 doit être identique à la masse contenue entre $x_1 + v_1.\Delta t$ et $x_2 + v_2.\Delta t$.

Ce que l'on peut ramener ici à la conservation du débit massique :

$\Delta t.v_1.A_1.\rho = \Delta t.v_2.A_2.\rho$.

Toutes les forces qui s'exercent (forces pressantes et poids) sont conservatives (il n'y a pas d'effet visqueux). On peut donc appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique au système:

$\Delta E_{pp} + \Delta E_k = W$

Où

$\Delta E_k = \Delta m(v_2^2 - v_1^2)/2$ est la variation d'énergie cinétique du système.

$\Delta E_{pp} = \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1$ est la variation d'énergie potentielle de pesanteur du système.

$W = p_1 A_1.(v_1 \Delta t) - p_2 A_2.(v_2 \Delta t)$ est le travail des forces de pressions.

Soit:

$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h_2 - \Delta m g h_1 = p_1 A_1.(v_1 \Delta t) - p_2 A_2.(v_2 \Delta t)$$

D'où, en divisant par Δm:

$$\frac{v_1^2}{2} + gh_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gh_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Et donc:

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = C$$

On peut remarquer que la démonstration est faite dans le contexte particulier d'un écoulement obéissant à la géométrie de la figure. Cependant, pour un écoulement quelconque en régime permanent, on pourra toujours définir au voisinage d'une ligne de courant une section sur laquelle la vitesse est homogène, et raisonner comme précédemment.

ii. A l'aide de l'équation d'Euler

Quelque soit la particule fluide M, l'équation d'Euler peut s'écrire sous la forme :

$$\rho\vec{\gamma}(M/R) = -\overrightarrow{grad}(P + \rho gz)$$

Où : z est la côte de la particule M et R un référentiel galiléen.

D'autre part, on sait que :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \overrightarrow{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{V}$$

Dans le cas d'un écoulement permanent, ρ = Cte, ce qui conduit à :

$$\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{V^2}{2}\right) + \rho\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{V}) \wedge \vec{V} = -\overrightarrow{grad}\,(P + \rho gz)$$

Comme la fonction $\overrightarrow{grad}$ est linaire, alors on aura :

$$\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{V^2}{2} + P + \rho gz\right) + \rho\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{V}) \wedge \vec{V} = 0$$

Considérant un déplacement $d\vec{M}$ infinitésimal sur une ligne de courant (ou sur les trajectoires, puisque l'écoulement est permanent, les trajectoires et lignes de courant sont confondus), on a :

$$d\vec{M} = \vec{V}dt$$

Comme le vecteur vitesse $\vec{V}$ est parallèle à l'élément de déplacement $d\vec{M}$ et que $\vec{V}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{V}$, alors la projection de $\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{V^2}{2} + P + \rho gz\right) + \rho\,\overrightarrow{rot}\,(\vec{V}) \wedge \vec{V} = 0$ suivant le vecteur $d\vec{M}$ conduit à:

$$\overrightarrow{grad}\left(\rho\frac{V^2}{2}+P+\rho gz\right)d\vec{M}=0$$

On sait que quelque soit la fonction scalaire f, on peut écrire :

$$\overrightarrow{grad}(f)d\vec{M}=df$$

Alors, on peut déduire que :

$$d\left(\rho\frac{V^2}{2}+P+\rho gz\right)=0 \quad \text{Sur la ligne de courant considérée}$$

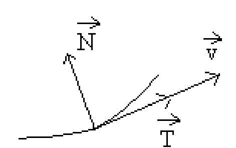
Et par conséquent :

$$\left(\rho\frac{V^2}{2}+P+\rho gz\right)=Cte \quad \text{Sur la ligne de courant considérée}$$

La constante varie d'une ligne de courant à une autre.

III-7.4 Equation transversale

Soit $\vec{N}$ le vecteur normal à la trajectoire (ou à la ligne de courant) orienté vers l'intérieur de la cavité.



Dans le repère de Frénet $(\vec{T},\vec{N})$, on a :

$$\vec{\gamma}(M/R)=\frac{dV}{dt}\vec{T}+\frac{V^2}{R}\vec{N}$$

Où : R est le rayon de courbure des lignes de courant au point M considéré.

La projection de $\rho\vec{\gamma}=-\overrightarrow{grad}(P)-\rho g\vec{e}_z$ suivant la normale conduit à :

$$\rho\frac{V^2}{R}=-\frac{\partial P}{\partial n}-\rho g\cos(\varphi)$$

Où : φ est l'angle entre les vecteurs unitaire $\vec{N}$ et $\vec{e}_z$.

Remarque :

Dans un écoulement où on peut négliger les forces de gravite, la pression reste constante lorsqu'on se déplace perpendiculairement aux trajectoires dans les zones ou celles-ci sont des droites. C'est-à-dire lorsque R tend vers l'infini.

En général, si les trajectoires sont des droites alors on aura :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

III-8. Applications

III-8.1 Phénomène de Venturi

Un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B. La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue :

si $v_B > v_A$ donc $p_B < p_A$

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

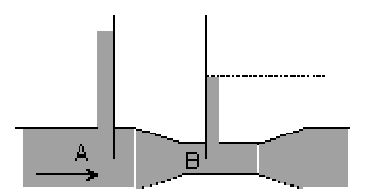
$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

D'après l'équation de continuité, $V_B S_B = V_A S_A = q_V$ et $V_B > V_A$ donc $P_A > P_B$

$$p_A - p_B = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right) q^2 = k\, q^2$$

La différence de pression aux bornes aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit ; application à la mesure des débits (organes déprimogènes).

On peut citer aussi la trompe à eau, le pulvérisateur...



III.8.2 Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section s et une ligne de courant partant de la surface au point (1) et arrivant à l'orifice au point (2). En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2),

$$\rho\frac{v_1^2}{2}+\rho g z_1+p_1=\rho\frac{v_2^2}{2}+\rho g z_2+p_2$$

Or : $p_1 = p_2$ = pression atmosphérique et $v_1 << v_2$ d'où : $V_2=\sqrt{2gz}$

La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice, quelle que soit la masse volumique du liquide.

Application : vase de Mariotte à débit constant.

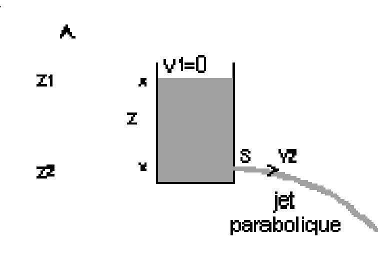
III-8.3 Vidange d'un réservoir

On considère le schéma suivant :

La section S = S(z) est variable. D'après, d'une part, la conservation du débit S.V = s.v et d'autre part, Torricelli $v=\sqrt{2gz}$, on aura :

$$SV = s\sqrt{2gz}$$

Or : l'expression de la vitesse à la surface libre s'écrit : $V=-\frac{dz}{dt}$



Donc, il vient :

$$S\left(-\frac{dz}{dt}\right)=s\sqrt{2gz}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dz}{dt}+\frac{s}{S(z)}\sqrt{2gz}=0$$

La section S(z) peut s'écrire sous la forme générale : Bz^n
En particulier :

- le cas d'un réservoir parallélépipédique : S(z) = L*z
- le cas d'un réservoir conique : $S(z)=\pi tg^2(\alpha)z^2$

Où : α est l'angle d'ouverture du cône

L'équation précédente peut s'écrire alors sous la forme :

$$\frac{dz}{dt}+\frac{s}{Bz^n}\sqrt{2gz}=0$$

L'intégration de cette équation entre deux altitudes z_1 et z_2 correspondant aux instants t_1 et t_2 conduit à :

$$t_1-t_2=\frac{B}{\left(n+\frac{1}{2}\right)s\sqrt{2g}}\left(z_1^{n+\frac{1}{2}}-z_2^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

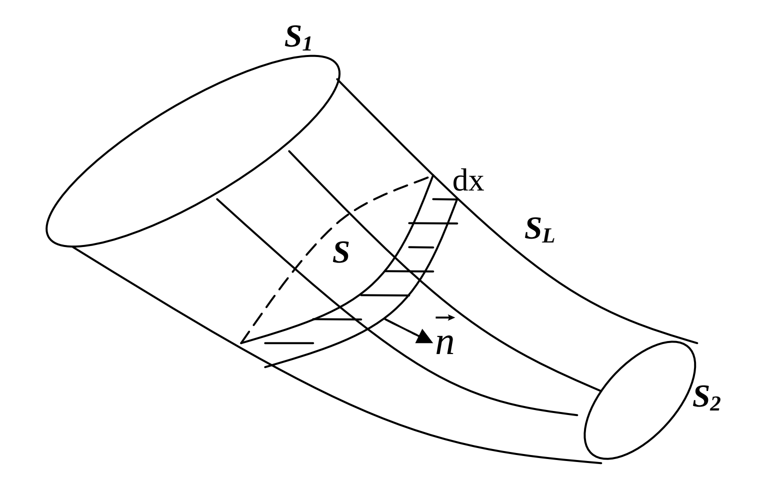
Remarque :

Si H est la hauteur initiale de la surface libre, alors la durée nécessaire pour vider le réservoir est :

$$t = \frac{B}{\left(n+\frac{1}{2}\right)s\sqrt{2g}} H^{n+\frac{1}{2}}$$

III-9. Théorème global d'Euler

On considère un tube de courant au sein d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ en écoulement permanant.
La portion étudiée est délimitée par S_1, S_2 et S_L, son volume est V.



Le volume de la tranche hachurée est

$$dV = S\ dx = \vec{S}\ \overrightarrow{dx} = S\ \vec{n}\ \overrightarrow{dx}$$

Or : $\overrightarrow{dx} = \vec{v}\ dt \Rightarrow dV = S\ (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dt = Q\ dt$

Où : Q est le débit volumique

Sa masse est donc : $dm = \rho\ dv = \rho\ Q\ dt$

Sa quantité de mouvement : $d\vec{p} = (dm)\vec{v} = \rho\ Q\ \vec{v}\ dt$

Le taux de variation de la quantité de mouvement est : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho\ Q\ \vec{v}$

En utilisant la relation fondamentale de la dynamique (R.F.D) à la tranche hachurée, on aura :

$$(dm)\ \vec{\gamma}\left(C/_R\right) = \sum \vec{F}_{ext} \quad \text{appliquées } \%\ R$$

$$(dm)\ \frac{d}{dt}\vec{V}\left(C/_R\right) = \sum \vec{F}_{ext}$$

Or : $dm = cste \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(dm)\,\vec{v}\left(C/_{R}\right)\right] = \sum \vec{F}_{ext}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}\Big/_{R} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Le taux de variation de (dm) est égal à la somme de forces appliquée.

En étendant ce résultat à tout le tube, on aura :

$$-\rho\, Q_1\, \overrightarrow{v_1} + \rho\, Q_2\, \overrightarrow{v_2} = \vec{R}$$

Où : $\vec{R}$ *est la* résultante de tous les efforts appliqués

Or : $Q_1 = Q_2 \Rightarrow \rho\, Q\left(\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}\right) = \vec{R}$

La résultante $\vec{R}$ est la somme des forces suivantes :

+ forces de pression

+ forces de pesanteur

+ forces exércées par des obstacles

Partie 2 : Complément de mécanique des solides (équations de Lagrange d’un solide conservatif)

I- Introduction

Le formalisme de Lagrange permet d'étudier une vaste gamme de problèmes en mécanique. Il est équivalent au formalisme de Newton mais, il a sur ce dernier un certain nombre d'avantages. D'abord, il est fondé sur un principe théorique fondamental et facile à retenir. Il utilise des quantités scalaires plutôt que vectorielles et sa forme est indépendante des coordonnées utilisées.

On considère un système de N particules, numérotées (i = 1,2,…,N), de masse m_i soumis à un ensemble de forces. Nous distinguons deux types de forces : externes et internes.

- Les forces externes, agissant sur le système, sont dues à des sources externes au système.
- Les forces internes, agissant sur la particule i, sont dues à toutes les autres particules du système.

Ainsi l'équation du mouvement pour la particule i aura la forme : $\frac{d}{dt}(m_i\vec{V}_i) = \vec{F}_{i\,ext} + \sum_j \vec{F}_{ji} \qquad j \neq i$

Où, $\vec{F}_{i\,ext}$ représente une force extérieure agissant sur la particule i ;

Et $\vec{F}_{ji}$ représente une force interne agissant sur la particule i, due à la particule j.

Evidement, nous supposons que $\vec{F}_{ji}$ obéit à la loi de l'action et la réaction. C'est à dire que lorsque la particule j exerce une force $\vec{F}_{ji}$ sur la particule i alors la particule i exerce une force $\vec{F}_{ij}$ sur la particule j, tel que: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}$

Dans un référentiel galiléen donné, il faut, pour décrire le mouvement du système, connaître la dépendance temporelle des 3N coordonnées $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$.

Les lois de Newton permettent de décrire le mouvement de chaque particule localement et de proche en proche tout au cours de temps. Par contre, le formalisme de Lagrange permet de décrire le mouvement du système globalement.

II- Coordonnées généralisées

Afin de déterminer la position d'un système de N points matériels dans l'espace il faut donner N rayons vecteurs, c'est-à-dire 3N coordonnées.

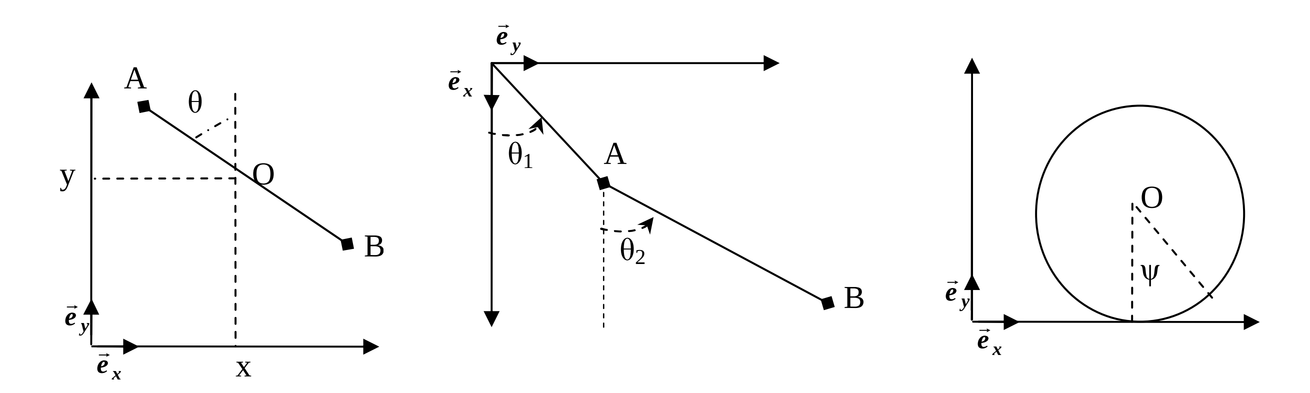
En général, le nombre de grandeurs indépendantes qu'il faut se donner pour déterminer de façon univoque la position d'un système est appelé nombre de degré de liberté du système. Dans d'autre cas, le nombre de degré de liberté est égal à 3N. Ces grandeurs ne sont pas forcement les

coordonnées intérieures du point, et selon les conditions et la nature du problème, le choix d'un autre système de coordonnées sera plus utile.

Soit s grandeurs quelconques, q_1, q_2,….q_s, qui caractérisent complètement la position du système (à s degré de liberté) sont appelées coordonnées généralisées et les dérivées ($\dot{q}_i \quad i=1,s$) ses vitesses généralisées.

- Les coordonnées d'un point matériel sont utilisées pour repérer un point par rapport à un référentiel de référence.
- Les coordonnées généralisées sont utilisées pour repérer un système dynamique par rapport à un référentiel de référence.

Exemple de coordonnées généralisées :



Remarque :

Un ensemble de coordonnées généralisées est dit complet si les valeurs des coordonnées, correspondant à une configuration du système compatible avec les liaisons, sont suffisantes pour repérer la position de chacune des parties du système.

III- Contraintes géométriques

III-1. Définition

Une contrainte géométrique est une condition qui entraîne une réduction du nombre de degrés de liberté.

Exemple :

- Roulement sans glissement d'un disque sur un plan.
- Une tige assujettie à rester dans un plan pendant son mouvement.

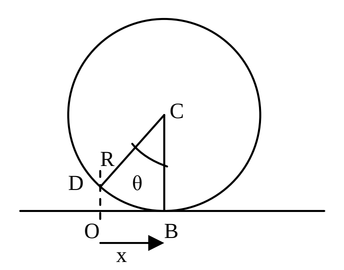
III-2. Liaison holonome

Une liaison est holonome si elle s'exprime par une relation entre les variables de position et le temps sans faire intervenir les dérivées par rapport au temps des variables de position. Une liaison holonome est donc de la forme :

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0$$

Exemple :

On considère le mouvement d'un disque sur un axe horizontal représenté par le schéma suivant :



On a : $x = R\,\theta$ c'est une liaison holonome c'est-à-dire $dx = R\,d\theta$

III-3. Contrainte non holonome

Une liaison est non holonome si elle s'exprime par une relation entre les variables de position, le temps et les dérivées premières, par rapport au temps, des variables de position. Une liaison non holonome est donc de la forme :

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N, t) = 0$$

Remarque :

Une liaison est non holonome si elle n'est pas intégrable.

IV- Centre de gravité

IV-1. Cas d'un ensemble discret

Le centre de gravité d'un ensemble discret de ***N*** particules, numérotées (1,2,…,*N*) et de masse m_i, est ***G*** défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_N \overrightarrow{OG_N}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$$

IV-2. Cas d'un ensemble continu

Le centre de gravité ***G*** d'un ensemble continu est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \int_{P \in \text{système}} \overrightarrow{OP}\, dm$$

V- Le paramétrage

On commence par préciser les paramètres de rotation et ensuite ceux de la translation

V-1. Paramètres de rotation

V-1.1 Rotation propre (φ)

Définition :

C'est la rotation du système autour de l'axe de révolution.

Remarque :

Lorsque le système est rectiligne (cas d'une tige) il n'y a pas de rotation propre.

V-1.2 La nutation (θ)

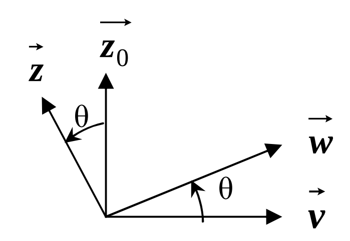
Définition :

C'est la rotation du système soit autour de $\vec{u}$, soit autour de $\vec{v}$. La nutation définit l'angle entre l'axe fixe $\vec{z}_0$ et l'axe de révolution $\vec{z}$ du système.

Remarque :

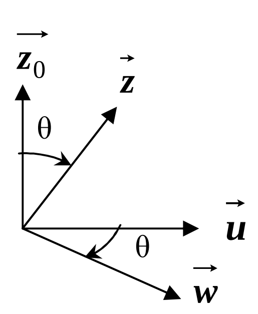
- Si la nutation est autour de $\vec{u}$ alors :

$$\vec{z}_0 = \cos\theta\, \vec{z} + \sin\theta\, \vec{w} \qquad (1)$$



- Si la nutation est autour de $\vec{v}$ alors :

$$\vec{z}_0 = \cos\theta\, \vec{z} - \sin\theta\, \vec{w} \qquad (2)$$



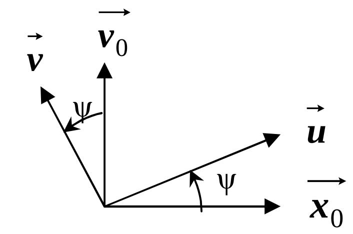
Remarques :

- Si le mouvement est plan alors la rotation (nutation) est égale à une constante
- Si l'axe de révolution du système reste parallèle avec le plan fixe alors la nutation est égale à une constante

V-1.3 la Précession (ψ)

Définition :

C'est la rotation du système autour de l'axe fixe $\vec{z}_0$



V-2. Paramètres de la translation

On définit ces paramètres en exprimant le vecteur $\overrightarrow{OG}$ dans le référentiel fixe $R_0(G, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$.

Remarque :

Si le système admet un point fixe, on n'aura pas besoin de définir ces paramètres.

V-3. Schéma du paramétrage

$$R_0(O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0) \xrightarrow{\text{Translation } \overrightarrow{OG}} R_0(G, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$$

$$R_0(G, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0) \xrightarrow[\dot{\psi}]{\vec{z}} R'(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$

$$R\,(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) \xleftarrow[\dot{\varphi}]{\vec{z}} R''(G, \vec{u}, \vec{w}, \vec{Z}) \xleftarrow[\dot{\theta}]{\vec{u}} R'(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{Z}_0)$$

Le vecteur rotation du système est le suivant :

$$\vec{\Omega}\,(S/R_0) = \dot{\psi}\,\vec{z}_0 + \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\varphi}\,\vec{z} = \dot{\theta}\,\vec{u} + \dot{\psi}\sin\theta\,\vec{w} + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\,\vec{z}$$

V- Référentiel principal d'inertie

V-1. Constatation

Un référentiel est principal d'inertie s'il vérifie l'une des options suivantes :

Option 1 : il contient l'axe de révolution du système.

Option 2 : il contient deux axes de symétrie pour le système.

Option 3 : il contient deux plans de symétrie pour le système.

V-2. Conséquences

Si $\mathcal{R}$ est un référentiel principal d'inertie alors la matrice d'inertie du système sera diagonale par rapport à $\mathcal{R}$.

C'est-à-dire :

$$\Pi_G(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Remarques :

- Si le système admet une symétrie sphérique alors ***A*** = ***B*** = ***C***.
- Si le système admet une symétrie cylindrique par rapport à $\vec{z}$ (par exemple) alors ***A*** = ***B***
- $\Pi_G(S)$ est la matrice centrale principale.
- $\Pi_A(S) = \Pi_G(S) + \Pi_A(G,m)$

Pour déterminer $\Pi_A(G,m)$, il suffit de déterminer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ et l'exprimer dans la base où $\Pi_G(S)$ est diagonale. Par exemple, si on trouve que :

$$\overrightarrow{AG} = a\,\vec{u} + b\,\vec{w} + c\,\vec{z} \qquad \text{(c'est le cas général)}$$

Alors :

$$\Pi_A(G,m) = \begin{bmatrix} m(b^2+c^2) & -m\,a\,b & -m\,a\,c \\ -m\,a\,b & m(a^2+c^2) & -m\,b\,c \\ -m\,a\,c & -m\,b\,c & m(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

Remarque :

Si $\overrightarrow{AG} = c\,\vec{z}$ alors il suffit de donner à ***a*** et ***b*** la valeur 0, soit alors :

$$\Pi_A(G,m) = \begin{bmatrix} m\,c^2 & 0 & 0 \\ 0 & m\,c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{u},\vec{w},\vec{z})}$$

VI- Energie cinétique

- Si le système admet un point fixe ***A***, par exemple, alors :

$$T(S/R) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)\cdot\Pi_A(S)\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$$

- Si le système n'admet pas de point fixe, alors :

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}mV^2(G/R_0) \quad + \quad \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0)\cdot\Pi_A(S)\cdot\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Remarque :

Si le système Σ est formé par $(S_1)\cup(S_2)$, alors :

$$T(\Sigma/R_0) = T(S_1/R_0) \quad + \quad T(S_2/R_0)$$

VII-Energie potentielle

VII-1. Energie de la pesanteur :

Par définition U_p (pesanteur) est définie par :

$$U_p(\text{pesanteur}) = -\vec{P}\cdot\overrightarrow{OG} + cste$$

Centre du référentiel fixe (O) — Centre d'inertie du système (G)

Si l'axe $\vec{z}_0$ est orienté vers le bas alors $\vec{P} = m\,g\,\vec{z}_0$, donc :

$$U_p(\text{pesanteur}) = -\,m\,g\,\vec{z}_0\cdot\overrightarrow{OG} + cste$$

Si l'axe $\vec{z}_0$ est orienté vers le haut alors $\vec{P} = -\,m\,g\,\vec{z}_0$, donc :

$$U_p(\text{pesanteur}) = m\,g\,\vec{z}_0\cdot\overrightarrow{OG} + cste$$

VII-2. Energie élastique : (énergie potentielle du ressort)

Par définition U_p (ressort) est :

$$U_p(ressort) = \frac{1}{2} K \cdot \Delta X^2 \qquad \textbf{avec} \quad \Delta X = L_{finale} - L_{initiale}$$

Remarque :

Si le système Σ est formé par $(S_1) \cup (S_2)$, alors :

$$U_p(\Sigma) = U_p(S_1) \quad + \quad U_p(S_2)$$

VIII- Equations de Lagrange

VIII-1. Système conservatif

On dit qu'un système est conservatif si et seulement si les liaisons sont parfaites, indépendantes du temps et les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle.

Remarque :

On dit qu'une liaison est parfaite si et seulement si la puissance virtuelle est nulle. Cette puissance sera nulle si et seulement si :

- Le mouvement s'effectue sans frottement,
- Le point de la liaison est fixe,
- Le roulement s'effectue sans glissement.

VIII-2. Champ des déplacements virtuels

On définit le déplacement virtuel d'un système comme étant un changement dans la configuration de ce système résultant d'un changement arbitraire très petit des coordonnées, noté $\delta \vec{r_i}$, compatible avec les forces et les liaisons imposées au système à l'instant donné t. Donc, ce déplacement virtuel n'implique que les déplacements des coordonnées et n'introduit aucune variation du temps δt .

VIII-3. Equations de Lagrange

Afin de former les équations de Lagrange, il faut établir une expression portant sur les déplacements virtuels des coordonnées généralisées qui sont indépendantes les unes des autres.

Le passage des $\vec{r_i}$ aux q_i se fait à l'aide des équations de transformation :

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}\,(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$$

Et aussi en utilisant les règles usuelles aux dérivées partielles. Ainsi la vitesse $\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$ peut s'écrire à l'aide des q_i de la façon suivante :

$$\vec{V}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

De même, le déplacement virtuel arbitraire peut être associé aux déplacements virtuels par :

$$\overrightarrow{\delta r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

Le travail virtuel des forces $\vec{F}_i$ peut s'écrire, à l'aide des coordonnées généralisées, sous la forme suivante :

$$\sum_i \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i \;=\; \sum_{i,j} \vec{F}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j \;=\; \sum_j Q_j\,\delta q_j$$

Avec : $$Q_j = \sum_i \vec{F}_i\,\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Or : $$\vec{F}_i = m_i\,\ddot{\vec{r}}_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j)]$$

$$= \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) - m_i \vec{V}_i \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{d \vec{r}_i}{dt}) \delta q_j]$$

$$= \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) - m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} \delta q_j]$$

Or : $$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial q_j} = \frac{\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t}}{\frac{\partial^2 q_j}{\partial t}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Donc :

$$\Rightarrow \quad \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} - m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j})] \delta q_j$$

$$= \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2)) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2)] \delta q_j$$

Or : $T_i = \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2$ énergie cinétique de la particule ***i.***

$$\Rightarrow \quad \sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{i,j} [\frac{d}{dt}(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j}] \delta q_j$$

$$= \sum_{j} [\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j}] \delta q_j$$

On a : $$\sum_{i,j} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j} Q_j \delta q_j$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j} (\frac{d}{dt}(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} - Q_j) \delta q_j = 0$$

Comme δq_j est arbitraire alors :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0$$

Dans le cas d'un système conservatif, les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle Up qui ne dépend pas du temps, et on peut écrire :

$$\vec{F}_i = \vec{\nabla}_i U_p \quad \text{donc} \quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \vec{\nabla}_i U_p \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U_p}{\partial q_j}$$

D'où
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U_p}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T - U_p)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - U_p) = 0$$

On pose $L = T - U_p$ le Lagrangien du système, on aura :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

VIII-4. Intégrale première de l'énergie

Si le système est conservatif, alors on peut écrire l'intégrale première de l'énergie :

$$T(S/R_0) + U_p(S) = cste$$

VIII-5. Le Lagrangien du système

Par définition :

$$L(S/R_0) = T(S/R_0) - U_p(S)$$

VIII-6. Intégrale première du mouvement

Définition :

C'est le cas où on trouve qu'une fonction des paramètres du problème est égale à une constante

IX- Positions d'équilibre

Si le système est conservatif, on détermine les positions d'équilibre à l'aide de la résolution du système d'équations $\frac{\partial U_p}{\partial q_i} = 0$ où q_i sont les paramètres principaux du système.

X- Etudes de la stabilité d'une position d'équilibre

Si le système est conservatif, on peut déterminer si une position d'équilibre est stable à l'aide du théorème de Lejeune Dirichlet par :

-On définit le Jacobien,

-On détermine la trace et le déterminant du Jacobien.

Remarques :

- Une position d'équilibre sera stable si, et seulement si, $\boldsymbol{trace}(\boldsymbol{J}) > 0$ et $\mathbf{det}(\boldsymbol{J}) > 0$.
- Si au moins l'un de ces deux quantités est ≤ 0 on ne peut pas conclure à l'aide de ce théorème.

Exemple :

Supposons que $\boldsymbol{U_p}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{m\,g\,l}\cos\theta + \boldsymbol{m\,g\,R}\cos\varphi + \boldsymbol{cste}$ et que le système est conservatif.

Position d'équilibre :

$$\frac{\partial \boldsymbol{U_p}}{\partial \theta} = -\boldsymbol{m\,g\,l}\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0\,,\pi$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U_p}}{\partial \varphi} = -\boldsymbol{m\,g\,R}\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0\,,\pi$$

Alors les positions d'équilibre sont :

E_1 ($\boldsymbol{\theta_1} = 0$, $\boldsymbol{\varphi_1} = 0$) ; E_2 ($\boldsymbol{\theta_2} = 0$, $\boldsymbol{\varphi_2} = \pi$) ; E_3 ($\boldsymbol{\theta_3} = \pi$, $\boldsymbol{\varphi_3} = 0$) ; E_4 ($\boldsymbol{\theta_4} = \pi$, $\boldsymbol{\varphi_4} = \pi$)

Etude de la stabilité :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U_p}}{\partial \theta^2} = -\boldsymbol{m\,g\,l}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U_p}}{\partial \varphi^2} = -\boldsymbol{m\,g\,R}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U_p}}{\partial \theta\,\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U_p}}{\partial \varphi\,\partial \theta} = 0$$

D'où :
$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{m\,g\,l}\cos\theta & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{m\,g\,R}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Et : $\boldsymbol{trace}(\boldsymbol{J}) = -\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{l}\cos\theta - \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{R}\cos\varphi$ et $\det(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{m}^2\boldsymbol{g}^2\,\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{R}\cos\theta\cos\varphi$

Pour la position 1 :

$$\boldsymbol{trace}(\boldsymbol{J}) = -\boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{l} - \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{R} < 0$$

Donc : on ne peut pas conclure

Pour la position 2 :

$$\det(\boldsymbol{J}) = -\,\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{g}^2\,\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{R} < 0$$

Donc : on ne peut pas conclure

Pour la position 3 :

$$\det(\boldsymbol{J}) = -\,\boldsymbol{m}^2\boldsymbol{g}^2\,\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{R} < 0$$

Donc : on ne peut pas conclure

Pour la position 4 :

$$\boldsymbol{trace}(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{l} + \boldsymbol{m}\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{R} > 0$$

$$\det(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{m}^2\boldsymbol{g}^2\,\boldsymbol{l}\,\boldsymbol{R} > 0$$

Donc : E_4 est stable